ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG HÀ MY

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ LIÊN KẾT CỦA LŨY THỪA IĐÊAN CẠNH

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG HÀ MY

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ LIÊN KẾT CỦA LŨY THỪA IĐÊAN CẠNH

Ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 84. 601. 04

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. NGUYỄN THỊ DUNG

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng luận văn này là kết quả nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Thị Dung, các kết quả nghiên cứu là hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với các luận văn trước đây. Các thông tin, tài liệu trong luận văn đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2019

Học viên

HOÀNG HÀ MY

Lời cảm ơn

Luận văn "Tập iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa iđêan cạnh" được thực hiện tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình, tận tụy của PGS. TS. Nguyễn Thị Dung. Tôi xin bảy tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái nguyên, Ban chủ nhiệm Khoa Toán cùng các thầy cô khoa Toán đã tham gia giảng dạy và tạo điều kiện tốt nhất để tôi học tập và nghiên cứu.

Nhân dịp này, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2019

Học viên

HOÀNG HÀ MY

Mục lục

Mở đầu

Cho $R = K[x_1,\dots,x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường K và $G = (V,E)$ là đồ thị với tập đỉnh $V = V(G) = \{x_1,\dots,x_n\}$ và tập cạnh $E = E(G)$. Ta luôn giả thiết rằng đồ thị G không có đỉnh cô lập, nghĩa là tất cả các đỉnh của G đều nằm trong ít nhất một cạnh. *Iđêan cạnh của* G, kí hiệu bởi $I = I_G$, là iđêan của R sinh bởi tập các đơn thức không chứa bình phương x_ix_j sao cho $\{x_i,x_j\} \in E$.

Một vấn đề được nhiều người quan tâm là tìm tập iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa của iđêan cạnh, nghĩa là tập

$$\mathrm{Ass}(R/I^k) = \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ là iđêan nguyên tố và } \mathfrak{p} = (I^k : c) \text{ với } c \in R\}, k \geq 1.$$

Ta đã biết rằng vì I là iđêan đơn thức trong vành đa thức R nên các iđêan nguyên tố liên kết cũng là iđêan đơn thức sinh bởi tập con của tập các biến. Các iđêan nguyên tố liên kết với I tương ứng với tập các phủ đỉnh tối thiểu của đồ thị G và $\mathrm{Min}(R/I) = \mathrm{Ass}(R/I)$, trong đó $\mathrm{Min}(R/I)$ là tập các iđêan nguyên tố tối thiểu của I. Đối với iđêan cạnh, ta luôn có $\mathrm{Ass}(R/I) \subset \mathrm{Ass}(R/I^k)$ với mọi số nguyên k. Trong trường hợp dấu bằng xảy ra với mọi k thì I được gọi là *xoắn tự do chuẩn tắc*. Trong [1], M. Brodmann đã chứng minh rằng tập $\mathrm{Ass}(R/I^k)$ là ổn định với k đủ lớn, nghĩa là tồn tại số nguyên dương N_1 sao cho $\mathrm{Ass}(R/I^k) = \mathrm{Ass}(R/I^{N_1})$, với mọi $k \geq N_1$, và số N_1 nhỏ nhất thỏa mãn tính chất trên được gọi là *chỉ số ổn định* của I. Mặc dù người ta đã chứng minh rằng $\mathrm{Ass}(R/I^k)$ là ổn định với k đủ lớn, nhưng dáng điệu của $\mathrm{Ass}(R/I^k)$ với k nhỏ thì lại thất thường. Hơn nữa việc tìm tập ổn định $\mathrm{Ass}(R/I^{N_1})$ là rất phức tạp bởi một điều là các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ liên kết với lũy thừa nhỏ hơn của I lại không nhất thiết liên kết với lũy thừa lớn hơn của I. Đối với iđêan I, nếu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I^k)$ kéo theo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I^{k+1})$ với mọi $k \geq 1$ thì ta nói rằng $\mathrm{Ass}(R/I^k)$ tạo thành *dãy tăng*. Tuy nhiên, rất ít lớp iđêan thỏa mãn điều kiện này.

Kí hiệu $\overline{I^k}$ là bao đóng nguyên của I^k. Iđêan I được gọi là *chuẩn tắc* nếu $I^k = \overline{I^k}$ với mọi $k \geq 1$. Theo trên, rất ít lớp iđêan I sao cho $\operatorname{Ass}(R/I^k)$ thỏa mãn điều kiện dãy tăng. Tuy nhiên, điều kiện này là đúng cho bao đóng nguyên, nghĩa là nếu I là iđêan trên vành giao hoán Noether R, ta có $\operatorname{Ass}(R/\overline{I^k}) \subseteq \operatorname{Ass}(R/\overline{I^{k+1}})$ với k đủ lớn (xem Ratliff [11]), nghĩa là tồn tại số nguyên dương N_2 sao cho $\operatorname{Ass}(R/\overline{I^k}) \subseteq \operatorname{Ass}(R/\overline{I^{N_2}})$ với mọi $k \geqslant N_2$. Nhiều tính chất đẹp của tập $\operatorname{Ass}(R/\overline{I^{N_2}})$ được nghiên cứu trong [5].

Mục đích của luận văn là trình bày lại một số kết quả về tập các iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa của iđêan cạnh được viết bởi J. Martinez-Bernal, S. Morey và R. Villarreal trong bài báo [9]. Trong bài báo này bằng lý thuyết matching và tối ưu tổ hợp, họ đã chứng minh được hai kết quả chính:

- Tập các iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa của iđêan cạnh tạo thành một dãy tăng.

- Nhìn chung trong vành giao hoán Noether, $\operatorname{Ass}(R/\overline{I^{N_2}}) \subset \operatorname{Ass}(R/I^{N_1})$, nhưng với iđêan cạnh thì các tập ổn định này là như nhau, nghĩa là $\operatorname{Ass}(R/I^k) = \operatorname{Ass}(R/\overline{I^k})$ với $k \geq \max\{N_1, N_2\}$.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo thì nội dung chính của luận văn gồm hai chương:

Chương 1 là phần Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, ta nhắc lại một số kiến thức về tập iđêan nguyên tố liên kết, iđêan đơn thức, đồ thị và iđêan cạnh và bao đóng nguyên.

Chương 2 cũng là phần nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả chính trong bài báo [9] về iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa của iđêan cạnh. Ở chương này, ta tìm hiểu ba phần: Matching và Factor-critical, sự bảo toàn của tập iđêan nguyên tố liên kết, bao đóng nguyên và các tập ổn định.

Phần kết luận của luận văn tổng kết một số công việc đã thực hiện.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Tập iđêan nguyên tố liên kết

Cho R là một vành giao hoán, Noether, I là một iđêan của R. Các kiến thức ở mục này được viết dựa theo [8] và [12].

Định nghĩa 1.1.1. ([12, Định lý 3.52], [12, Định nghĩa 4.1], [12, Bổ đề 4.5])

(i) Giả sử $I \neq R$. Khi đó tập $\mathrm{Var}(I)$ các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R chứa I luôn có ít nhất một phần tử tối thiểu theo quan hệ bao hàm được gọi là *iđêan nguyên tố tối thiểu* của I. Tập tất cả các iđêan nguyên tố tối thiểu của I được ký hiệu là $\mathrm{Min}(R/I)$.

(ii) Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan của R. Ta nói $\mathfrak{q}$ là *nguyên sơ* nếu $\mathfrak{q} \neq R$ và nếu $ab \in \mathfrak{q}, a \notin \mathfrak{q}$ thì kéo theo $b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ với mọi $a, b \in R$.

(iii) Giả sử $\mathfrak{q}$ là nguyên sơ. Khi đó $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$ là iđêan nguyên tố của R và ta gọi $\mathfrak{q}$ là $\mathfrak{p}$-*nguyên sơ*. Hơn nữa $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố nhỏ nhất của R chứa $\mathfrak{q}$, nghĩa là mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R mà chứa $\mathfrak{q}$ thì đều chứa $\mathfrak{p}$. Vì thế $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố tối thiểu duy nhất của $\mathfrak{q}$.

Một phân tích $I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$, trong đó $\mathfrak{q}_i$ là $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ, được gọi là một *phân tích nguyên sơ* của I. Phân tích nguyên sơ này của I được gọi là *phân tích nguyên sơ thu gọn* nếu mỗi $\mathfrak{q}_i$ là không thừa (tức là không thể bỏ đi bất cứ $\mathfrak{q}_i$ nào trong phân tích trên) và các $\mathfrak{p}_i$ là đôi một phân biệt.

Ví dụ 1.1.2. Trong vành các số nguyên $\mathbb{Z}$, các iđêan nguyên sơ là và chỉ là các iđêan có dạng $m\mathbb{Z}$ với m là lũy thừa của một số nguyên tố.

Nếu $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ là hai iđêan $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của R thì $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ cũng là iđêan $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của R. Vì thế từ mỗi phân tích nguyên sơ của I ta có thể đưa phân tích đó về thu gọn bằng cách bỏ đi những thành phần nguyên sơ thừa và ghép những thành phần nguyên sơ có căn bằng nhau.

Hệ quả 1.1.3. ([12, Hệ quả 4.18], Định lý duy nhất thứ nhất) *Giả sử*

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}'_m$$

là hai phân tích nguyên sơ thu gọn của I, trong đó $\mathfrak{q}_i$ là $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ và $\mathfrak{q}'_i$ là $\mathfrak{p}'_i$-nguyên sơ. Khi đó $n = m$ và $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} = \{\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_n\}$.

Giả sử $I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ là phân tích nguyên sơ thu gọn của I, $\mathfrak{q}_i$ là $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ. Theo hệ quả trên, tập $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ là xác định duy nhất (không phụ thuộc vào phân tích nguyên sơ thu gọn của I) và được gọi là tập các *iđêan nguyên tố liên kết* của I, ký hiệu bởi $\mathrm{Ass}(R/I)$ (xem [12, Định nghĩa 4.19]).

Nhìn chung các thành phần nguyên sơ $\mathfrak{q}_i$ không xác định duy nhất, nhưng nếu $\mathfrak{p}_i$ là tối thiểu thì $\mathfrak{q}_i$ là duy nhất.

Định lý 1.1.4. ([12, Định lý 4.29], Định lý duy nhất thứ hai) *Giả sử*

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}'_n$$

là hai phân tích nguyên sơ thu gọn của I, trong đó $\mathfrak{q}_i$ là $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ và $\mathfrak{q}'_i$ là $\mathfrak{p}'_i$-nguyên sơ. Khi đó nếu $\mathfrak{p}_i$ tối thiểu trong tập $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ thì $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}'_i$.

Theo định lý trên, các thành phần nguyên sơ $\mathfrak{q}_i$ ứng với iđêan nguyên tố liên kết tối thiểu $\mathfrak{p}_i$ là xác định duy nhất, ta gọi chúng là các *thành phần nguyên sơ cô lập*, còn lại được gọi là *thành phần nguyên sơ nhúng* của I. Nghĩa là ta có thể mô tả lại phân tích nguyên sơ của I như sau:

$$I = q_1 \cap \ldots \cap q_t \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_s,$$

trong đó $\sqrt{q_i} \in \mathrm{Min}(R/I)$, với $i = 1, \ldots, t$ được xác định duy nhất và $\sqrt{Q_j}$ với $j = 1, \ldots, s$ là các iđêan nguyên tố nhúng.

Ví dụ 1.1.5. Cho vành $R = K[x,y,z]$ và $I = (x^2, y^2, xyz)$ là iđêan của R. Khi đó ta có phân tích nguyên sơ của I

$$I = (x^2,y^2,x) \cap (x^2,y^2,y) \cap (x^2,y^2,z) = (x,y^2) \cap (x^2,y) \cap (x^2,y^2,z),$$

trong đó đặt $\mathfrak{q}_1 = (x, y^2), \mathfrak{q}_2 = (x^2, y), \mathfrak{q}_3 = (x^2, y^2, z)$. Ta có $\sqrt{\mathfrak{q}_1} = (x, y) = \mathfrak{p}_1$, $\sqrt{\mathfrak{q}_2} = (x, y) = \mathfrak{p}_2$, $\sqrt{\mathfrak{q}_3} = (x, y, z) = \mathfrak{p}_3$ và các $\mathfrak{q}_i$ là các $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ, với $i = 1, 2, 3$. Đặt $\mathfrak{q}'_1 = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 = (x^2, xy, x^2y^2, y^2) = (x^2, xy, y^2)$. Khi đó $\sqrt{\mathfrak{q}'_1} = (x, y) = \mathfrak{p}_1$. Suy ra $I = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}_3$ là phân tích nguyên sơ thu gọn của I và tập iđêan nguyên tố liên kết $\operatorname{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3\}$ là xác định duy nhất. Mặt khác, vì $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_3$ nên trong tập $\operatorname{Ass}(R/I)$ thì $\mathfrak{p}_1$ là iđêan nguyên tố cô lập, $\mathfrak{p}_3$ là iđêan nguyên tố nhúng. Do đó $\mathfrak{q}'_1$ xác định duy nhất còn $\mathfrak{q}_3$ chưa chắc đã xác định duy nhất. Thật vậy, tồn tại iđêan $\mathfrak{q}'_3 = (x^2, y^2, z^2, xyz)$ sao cho $\mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_3 = I$ mà $\sqrt{\mathfrak{q}'_3} = (x, y, z) = \mathfrak{p}_3$. Rõ ràng $\mathfrak{q}'_3$ là $\mathfrak{p}_3$-nguyên sơ và $\mathfrak{q}_3 \subsetneq \mathfrak{q}'_3$.

Kết quả sau đây cho ta thấy iđêan nguyên tố liên kết được bảo toàn qua địa phương hóa.

Định lý 1.1.6. [8, Định lý 6.2] *Giả sử $S \subset R$ là tập nhân đóng và N là một R_S-môđun. Xem $\operatorname{Spec}(R_S)$ là một tập con của $\operatorname{Spec}(R)$, ta có $\operatorname{Ass}_R(N) = \operatorname{Ass}_{R_S}(N)$. Nếu R là Noether thì với R-môđun M ta có $\operatorname{Ass}(M_S) = \operatorname{Ass}(M) \cap \operatorname{Spec}(R_S)$.*

Từ các kết quả trên, ta thấy rằng một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R là iđêan nguyên tố liên kết của I nếu tồn tại phần tử $c \in R$ sao cho $\mathfrak{p} = (I : c) = \{r \in R \mid rc \in I\}$ (xem [12, Định lý 4.17]). Vì thế

$$\operatorname{Ass}(R/I^k) = \{\mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \text{ và tồn tại } c \in R \text{ sao cho } \mathfrak{p} = (I^k : c)\}.$$

Nhìn chung, ta luôn có $\operatorname{Min}(R/I) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I^k)$. Nếu trường hợp dấu bằng xảy ra với mọi k thì I là xoắn tự do chuẩn tắc. Trong [1], Brodmann đã chỉ ra rằng nếu R là vành Noether và I là iđêan của R thì tập $\operatorname{Ass}(R/I^k)$ là ổn định khi k đủ lớn. Nghĩa là tồn tại số nguyên dương N_1 sao cho $\operatorname{Ass}(R/I^k) = \operatorname{Ass}(R/I^{N_1})$ với mọi $k \geqslant N_1$. Số N_1 nhỏ nhất thỏa mãn tính chất trên là chỉ số ổn định của I. Mặc dù biết rằng tập $\operatorname{Ass}(R/I^k)$ là ổn định khi k đủ lớn, nhưng dáng điệu của nó khi k đủ nhỏ vẫn ít được biết đến. Việc tìm chỉ số N_1 hoặc xác định tập ổn định $\operatorname{Ass}(R/I^{N_1})$ là phức tạp bởi một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ liên kết với lũy thừa nhỏ hơn của I thì không nhất thiết lại liên kết với lũy thừa lớn hơn của I. Khi một iđêan I sao cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I^k)$ kéo theo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I^{k+1})$ với mọi $k \geqslant 1$ thì tập $\operatorname{Ass}(R/I^k)$ thỏa mãn điều kiện dãy tăng. Mặc dù được coi là rất đẹp nhưng ít lớp iđêan thỏa